# 8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерности между ними, которые дают нам ключ к пониманию явлений природы.

Альберт ЭЙНШТЕЙН

В данной лекции изучаются достаточно простые математические модели экономических систем[[1]](#endnote-1), описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями[[2]](#endnote-2). Рассматриваются главным образом два класса достаточно простых экономических процессов, связанных с взаимоотношениями различных экономических субъектов и с некоторыми формами рыночных отношений. Исследование первого класса моделей начинается с исследования одной фирмы, выпускающей товар при наличии на него ограниченного спроса. В модели конкурентной борьбы рассматриваются уже две конкурирующие фирмы в условиях ограниченного спроса на выпускаемую продукцию. Если они выпускают один и тот же товар, то более слабая фирма со временем разоряется. Если же каждая из них ориентируется на выпуск своего товара, то фирмы могут сосуществовать. Этот случай соответствует модели ниши. В Приложении рассматриваются также модели экономического сотрудничества и "рэкетир–предприниматель", являющиеся экономическими аналогами рассмотренных в предшествующей лекции моделей "симбиоз" и "хищник–жертва".

В качестве функций состояния второго класса моделей выбираются цена на товар, доходы населения и объем выпускаемой продукции. Исследуется изменение этих характеристик со временем в зависимости от формы управления экономикой. Рассматриваются модели свободного и монополизированного рынка, а также (в Приложении) модель инфляции, характерная для жесткого государственного регулирования экономики. Оказывается, что колебания цен, доходов населения и объема производства могут быть описаны уравнениями Вольтерра–Лотки, с которыми мы уже сталкивались ранее. Кроме того, в Приложении представлена чрезвычайно важная модель Солоу экономического роста.

### **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Развитие одной фирмы**

Рассмотрим сначала простейшую экономическую систему, представленную одной фирмой. Исследуемый процесс характеризуется ***оборотным капиталом*** фирмы *х*, который меняется со временем. Предполагается, что вся денежная сумма, полученная от продажи производимого товара, вкладывается в производство. Скорость изменения капитала определяется соотношением между доходами и расходами фирмы. Таким образом, получаем соотношение



где величины *А* и *В* характеризуют соответственно, доходы и расходы фирмы в единицу времени. Их значения, по-видимому, можно считать пропорциональными значениям капиталов: чем больше капитал фирмы, тем большие изменения могут произойти за фиксированный промежуток времени. В результате получаем соотношения *A=ax*,
*B=bx*, где положительные константы *a* и *b* являются параметрами процесса и характеризуют прирост доходов и расходов фирмы в единицу времени. Итак, рассматриваемый процесс описывается дифференциальным уравнениям

 **=*kx*, (8.1)

где коэффициент *k*=*a*–*b* называется ***приростом капитала***, характеризует изменение капитала фирмы в единицу времени и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Уравнение (8.1), соответствующее ***модели Мальтуса***, рассматривается с начальным условием

 *х*(0) = *х*0, (8.2)

где стартовый капитал *х*0 является параметром задачи.

При постоянном значении прироста капитала решение задачи (8.1), (8.2) имеет вид *x*(*t*)=*x*0 exp(*kt*). При положительных значениях прироста капитала доходы фирмы превышают ее расходы, и мы наблюдаем экспоненциальный рост функции *х*. При *k*=0 доходы совпадают с расходами, а решение задачи со временем не меняется. Наконец, для отрицательных значений этого параметра функция *х* монотонно убывает, что соответствует случаю разорения фирмы.

Для более точного описания исследуемого процесса необходимо учесть ограничения на потребление производимых товаров. В этом случае прирост капитала, по-видимому, будет уменьшаться с ростом функции *х*. Действительно, чем больше капитал фирмы, тем больше объем выпускаемой продукции, а значит, тем сильнее падение спроса на товары из-за неминуемого насыщения рынка. Мы принимаем следующую зависимость от величины *х* прироста капитала *k*(*х*) *= а*(*D–qx*) – *b*, где *D –* спрос на выпускаемую продукцию (неизменное количество товара, требуемое в единицу времени), *q* – количество товара, выпускаемое на единицу вложенного капитала, *b –* расходы фирмы, связанные с производством товара и не зависящие от количества проданного товара, *а* – прибыль, получаемая от продажи единицы товара. Таким образом, доходы фирмы определяются соотношением между спросом и предложением.

Итак, уравнение состояние системы принимает следующий вид

 *=* [(*аD*–*b*) – *аqx*]*x*. (8.3)

Таким образом, мы получаем хорошо известное ***уравнение Ферхюльста***. При выполнении неравенства *аD*>*b*, когда доходы, получаемые от продажи товара, превышают расходы фирмы, для любого начального состояния системы (стартового капитала) капитал фирмы со временем стремится к величине *х*\*=(*D*–*b*/*а*)/*q*. При этом, если стартовый капитал фирмы достаточно мал, т.е. справедливо неравенство *х*<*х*\*, то спрос превышает предложение, доходы фирмы растут, и она расширяет свое производство. Однако по мере насыщения рынка товарами прирост капитала снижается. Если же начальный капитал фирмы столь велик, что выполняется неравенство *х*>*х*\*, то наблюдается перепроизводство товаров (вспомним, что в рамках данной модели все денежные средства вкладываются в производство единственного товара). Поскольку не вся производимая продукция раскупается, фирма терпит убытки и постепенно сворачивает производство. По ходу восстановления баланса между спросом и предложением снижение капитала фирмы сокращается. Сравнительный анализ различных интерпретаций уравнения Ферхюльста приводится в Таблице 8.1[[3]](#endnote-3).

Теперь нам предстоит познакомиться с различными формами взаимоотношений между двумя экономическими субъектами.

***Развитие фирмы в условиях ограниченного спроса описывается моделью Ферхюльста.***

***В модели Ферхюльста капитал фирмы в условиях ограниченного спроса стабилизируется.***

#### **2. Модель "экономическая конкуренция"**

Рассматриваются две фирмы, выпускающие один и тот же товар и ориентированные на одного и того же потребителя. Предполагается, что в случае отсутствии проблем со сбытом обе фирмы имеют некоторую прибыль, т.е. затраты на изготовление или приобретение продукции окупаются в результате ее продажи. Считается, что весь имеющийся в наличии капитал вкладывается в производство. Таким образом, получив дополнительные средства от продажи товаров, фирмы расширяют производство, а при снижении получаемой прибыли выпуск товаров соответственно сокращается.

Таблица 8.1. Интерпретации уравнения Ферхюльста.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***характеристика*** | **физика** | **химия** | **биология** | **экономика** |
| *объект**исследования* | одномодовый лазер | система реакцийА+Х → 2Х Х → В | эволюция вида с ограниченной пищей | эволюция фирмыс ограниченнымспросом |
| *функция состояния* | числофотонов | концентрациявещества *Х* | численность вида | капитал фирмы |
| *ограничение* | количествовозбужденныхатомов | количествоисходного вещества *А* | количествопоступающей пищи | уровень спроса |
| *прирост функции состояния* | излучениефотонов атомами | синтез вещества *Х* | рождаемость вида | расширениепроизводства |
| *убыль функции**состояния* | уход фотоновиз системы | распад вещества *Х* | смертность вида | падениепроизводства |

В качестве функций состояния системы выбираются значения *x*1 и *x*2, соответствующие капиталам фирм. Очевидно, скорость их изменения будет пропорциональна величине капитала, т.е. чем больше денежных средств имеет фирма, тем больше она выпускает продукции, а следовательно, тем большую прибыль она получит в единицу времени. Тогда рассматриваемый процесс описывается уравнениями

**

где *ki* – прирост капитала соответствующей фирмы.

Если вся продукция фирмы реализуется, то прирост капитала *ki* считается равным некоторому положительному значению *i*, характеризующему эффективность производства. Как известно, соответствующие уравнения имеют экспоненциальные решения, т.е. при неограниченном потреблении товара доходы фирм экспоненциально возрастают со временем к великой радости их владельцев.

Естественно, такая ситуация на практике не реализуется, поскольку число возможных покупателей и их потребность в производимом товаре, заведомо ограничены. Очевидно, чем больше выпускается товара, тем меньше шансов обеспечить его полный сбыт в условиях ограниченного потребления. В этой связи будем считать, что снижение прироста доходов фирм будет пропорционально сумме капиталов обеих фирм, т.е. справедливо равенство

*ki = i –* (*x*1 +*x*2)/*i*

где коэффициент *βi* здесь характеризует эффективность сбыта производимый продукции и связан с организацией рекламы, культурой обслуживания и т.п. Таким образом, чем выше эффективность сбыта продукции, тем в меньшей степени возникающие проблемы с реализацией произведенного товара сказываются на скорости изменения капитала фирмы. В результате получаем уравнения

 **** (8.4)

которые и составляют основу модели "*экономическая конкуренция*".

Полученные уравнения достаточно близки к тем, что рассматривались в предшествующей лекции при описании процесса сосуществования двух биологических видов, потребляющих одну и ту же пищу, и обладают соответствующими свойствами. Для качественного поведения системы определяющую роль здесь играют произведения *εiβi* эффективности производства и сбыта товара (см. Рис. 8.1). Та фирма, у которой производство и сбыт товара осуществляется менее эффективно, неминуемо разоряется[[4]](#endnote-4).



Рис. 8.1. Фазовые кривые для модели конкуренции.

При *ε*1*β*1>*ε*2*β*2 разоряется более слабая вторая фирма (см. Рис. 8.1 *a*). В том случае, когда стартовые капиталы обеих достаточно малы, сначала обе фирмы полностью реализуют свою продукцию, богатеют и расширяют свое производство. Однако по мере насыщения рынка товарами первая фирма постепенно вытесняет своего более слабого конкурента (кривая 1). Ее капитал со временем стабилизируется на величине, равной *ε*1*β*1, соответствующей уровню спроса на выпускаемую продукцию. Если стартовые капиталы обеих фирм слишком велики, то рынок перенасыщен товарами. Фирмы сворачивают производство вплоть до того момента времени, когда будет восстановлен баланс между спросом и предложением (кривая 2). После этого в условиях конкурентной борьбы побеждает более сильная первая фирма. Если изначально стартовый капитал более конкурентоспособной фирмы слишком велик и намного превышает стартовый капитал второй фирмы, то в процессе сокращения производства слабая фирма разоряется раньше, чем наступит баланс между спросом и предложением. При этом фазовая кривая не попадет в зону конкурентной борьбы, представляющей собой трапецию, ограниченную прямыми *k*1 = 0 и *k*2 = 0. Обе функции состояния будут монотонно убывать, причем вторая из них стремится к нулю, а первая – к ненулевому положению равновесия (кривая 3). Если же суммарный стартовый капитал фирм будет не очень мал и не очень велик, то начальное состояние системы оказывается в зоне конкурентной борьбы. В этом случае обе функции состояния меняются монотонно, причем первая из них, возрастает и стремится к своему положению, а вторая – убывает до нуля (кривая 4).

При выполнении неравенства *ε*1*β*1<*ε*2*β*2 в процессе конкурентной борьбы побеждает вторая фирма. Поведение системы при этом аналогично предыдущему с той лишь разницей, что фирмы меняются местами (см. Рис. 8.1 *b*).

Равенство *ε*1*β*1=*ε*2*β*2 означает, что фирмы обладают одинаковой конкурентоспособностью (см. Рис. 8.1 *c*). Ни одна из них не в состоянии вытеснить своего конкурента. Если стартовые капиталы фирм малы, то обе они расширяют свое производство вплоть до насыщения рынка товарами (кривые 1). Если товары на рынке в избытке, то обе фирмы сворачивают производство (кривые 2). Особенностью данного варианта является наличия бесконечного множества положений равновесия (отрезок 3). При этом выход на конкретное положение равновесия определяется начальным состоянием системы.

Возможные исходы в модели конкуренции представлены на Рис 8.2, а характер динамики системы при различных исходах в Таблицах 8.2, 8.3 и 8.4.



Рис. 8.2. Возможные исходы в модели конкуренции.

Таблица 8.2. Динамика при исходе *a*) в модели конкуренции: разорение фирмы 2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*10** | ***х*20** | **кривая** | ***х*1** | ***х*2** |
| мало | мало | 1 | растет | сначала растет потом убывает |
| велико | велико | 2 | сначала убывает потом растет | убывает |
| велико | мало | 3 | убывает | убывает |
| умеренно | умеренно | 4 | растет | убывает |

Таблица 8.3. Динамика при исходе *b*) в модели конкуренции: разорение фирмы 1.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*10** | ***х*20** | **кривая** | ***х*1** | ***х*2** |
| мало | мало | 1 | сначала растет потом убывает  | растет |
| велико | велико | 2 | убывает | сначала убывает потом растет  |
| мало | велико | 3 | убывает | убывает |
| умеренно | умеренно | 4 | убывает  | растет |

Таблица 8.4. Динамика при исходе *с*) в модели конкуренции: сохранение обеих фирм.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ***х*10** | ***х*20** | **кривая** | ***х*1** | ***х*2** |
| мало | мало | 1 | растет  | растет |
| велико | велико | 2 | убывает | убывает |
| проекция точкина отрезке 3  | проекция точкина отрезке 3 | равновесия | постоянно | постоянно |

**Задание 8.1. Экономическая конкуренция**. На основе численного решения системы (8.4) с соответствующими начальными условиями провести следующий анализ.

1. Найти все возможные положения равновесия системы (8.4). Задавая каждое из них в качестве начального состояния системы, убедиться, что это действительно положение равновесия. Экспериментально проверить положения равновесия на устойчивость, выбирая начальное состояние системы из его окрестности.

2. Провести расчеты при выполнении условия *ε*1*β*1>*ε*2*β*2. Убедиться в том, что вторая фирма разоряется при любых начальных состояниях системы. Подобрать параметры системы таким образом, чтобы поведение системы было бы аналогично кривым 1, 2, 3 и 4 на Рис. 8.1 *b.*

3. Провести расчеты при выполнении условия *ε*1*β*1<*ε*2*β*2. Убедиться в том, что первая фирма разоряется при любых начальных состояниях системы. Подобрать параметры системы таким образом, чтобы поведение системы было бы аналогично кривым 1, 2, 3 и 4 на Рис. 8.1 *a.*

4. Провести расчеты при выполнении равенства *ε*1*β*1=*ε*2*β*2. Убедиться в том, что в этом случае ни одна из фирм не разоряется. Подобрать параметры системы таким образом, чтобы капиталы обеих фирм монотонно возрастали, монотонно убывали и не менялись со временем.

***Эволюция двух фирм, выпускающих одинаковую продукцию
в условиях ограниченного спроса описывается уравнениями конкуренции.***

***Согласно модели конкуренции слабейшая из фирм разоряется*.**

#### **3. Модель "экономическая ниша"**

В рассмотренной выше модели для двух фирм, выпускающих один и тот же товар, невозможно долговременное совместное существование, поскольку более слабая фирма неминуемо разоряется. Исключением здесь является мало вероятный вырожденный случай выполнения равенства *ε*1*β*1=*ε*2*β*2, когда фирмы практически не различаются свойствами. Ситуация решительно изменится, если каждая фирма будет ориентироваться на собственного покупателя, отдавая предпочтение производству какого-либо специфического товара. При этом мы получаем модель, аналогичную рассмотренной ранее модели "*экологическая ниша*"

  (8.5)

где *βij* – эффективность сбыта *i***-**ого товара *j*-ой фирмой. Для приведения полученной модели, которую естественно назвать "***экономическая ниша***" к рассмотренному в предшествующей лекции биологическому аналогу достаточно ввести параметры *αij*=1/*βij*.

Для исследования системы сделаем замену переменных

*τ* = *at*, *u*(*τ*) = *bx*1(*t*), *v*(*τ*) = *cx*2(*t*),

где константы *a*, *b*, *c* будут подобраны так, чтобы в новых переменных уравнения (8.5) были бы как можно проще. Функции *u* и *v* и переменная *τ* отличаются, соответственно, от величин *х*1, *х*2 и *t* лишь постоянными множителями. В этой связи они также характеризуют капиталы фирм и время, выраженные в другой системе координат.

После сделанных преобразований получаем соотношения



где через *u*', *v*' обозначены производные функций *u*, *v* по переменной *τ*. Определив параметры



установим уравнения

  (8.6)

Оценим варианты поведения решения полученной задачи, считая капиталы фирм неотрицательными. В зависимости от знака величин, находящихся в правых частях соотношений (8.6), возможны различные ситуации[[5]](#endnote-5). Рассмотрим возможные исходы рассматриваемых событий.

Исход *a*)[[6]](#endnote-6). При выполнении условий *B*≤1, *B*/*C*≤1 (кроме случая *B*=*C*=1) согласно уравнениям (8.6) возможны три варианта поведения их решения (см. Рис. 8.3*a*[[7]](#endnote-7)):

1) при *u*+*v*<1, *u*+*Cv*<*B* функция возрастает до единицы, а *v* возрастают, а потом *v* убывает до нуля;

2) при *u*+*v*<1, *u*+*Cv*>*B* функция *u* возрастает до единицы, а *v* – убывает до нуля;

3) при *u*+*v*>1, *u*+*Cv*>*B* функция *u* убывает, а потом возрастает до единицы (возможно, просто убывает до единицы), а *v* убывает до нуля.

Таким образом, вне зависимости от начального состояния системы решения задачи со временем стремятся к значениям *u*=1, *v*=0.

Исход *b*)[[8]](#endnote-8). При выполнении условий 1≤*B*, *C*≤*B* (кроме случая *B=C*=1) возможны три варианта поведения их решения (см. Рис. 8.3*b[[9]](#endnote-9)*):

1) при *u+v*<1, *u+Cv*<*B* функция *u* возрастает, а потом убывает до нуля, а *v* возрастает до величины *B*/*C*;

2) при *u+v*>1, *u*+*Cv*<*B* функция *u* убывает до нуля, а *v* возрастает до *B*/*C*;

3) при *u+v*>1, *u*+*Cv*>*B* функции *u* убывает до нуля, а *v* убывает, а потом возрастает до *B*/*C*(возможно, просто убывает до *B*/*C*).

Вне зависимости от начального состояния системы решения задачи со временем стремятся к значениям *u*=0, *v=B*/*C*.

Исход *c*)[[10]](#endnote-10). При выполнении условий *C<B*<1 допустимы четыре варианта: (Рис. 8.3*c*):

1) при *u+v*< 1, *u+Cv*<*B* функции *u* и *v* возрастают;

2) при *u+v*< 1, *u+Cv*>*B* функция *u* возрастает, а *v* – убывает;

3) при *u+v*>1, *u+Cv*<*B* функция *v* возрастает, а *u* – убывает;

4) при *u+v*>1, *u+Cv*>*B* функции *u* и *v* убывают.

В зависимости от начального состояния системы решения задачи со временем стремятся либо к значениям *u*=1, *v*=0, либо к *u*=0, *v=B*/*C*.

Исход *d*)[[11]](#endnote-11). При выполнении условий 1<*B<C* возможны четыре варианта: (Рис. 8.3*d*):

1) при *u+v*<1, *u+Cv*<*B* функции *u* и *v* возрастают;

2) при *u+v*<1, *u+Cv*>*B* функция *v* возрастает, а *u* – убывает;

3) при *u+v*>1, *u+Cv*<*B* функция *u* возрастает, а *v* – убывает;

4) при *u+v*>1, *u+Cv*>*B* функции *u* и *v* убывают.

Вне зависимости от начального состояния системы решения задачи со временем стремятся к значениям *u* = (*C*–*B*)/(*C*+1), *v* = (*B*+1)/(*C*+1).

Исход *e*)[[12]](#endnote-12). Случай *В=С*=1 является вырожденным. При этом состояния системы со временем стремятся к некоторым значениям, лежащим на прямой *u+v*=1 (к каким именно, зависит от начальных условий, см. Рис. 8.3*e*). С математической точки зрения вырожденный случай интересен тем, что предельные состояния системы (аттрактор) образуют не конечный набор точек на фазовой плоскости (положений равновесия), а некоторую линию – отрезок прямой *u+v*=1 с неотрицательными значениями функций состояния.

Проанализируем полученные результаты. Исход *a*) в действительности соответствует неравенствам

****

Рис. 8.3. Направления эволюции системы в модели "*экономическая ниша*".

Здесь первая фирма превосходит вторую по обоим видам товара, поскольку произведение эффективности производства и сбыта обоих видов товара у нее выше. Вследствие этого вторая фирма неминуемо разоряется, т.е. ее капитал стремится к нулю. При исходе *b*) реализуются противоположные неравенства

****.

Они соответствует разорению первой фирмы, которая оказывается более слабой. Оба эти варианты фактически возвращают нас к рассмотренной ранее модели экономической конкуренции.

При исходе *c*) реализуются соотношения

****,

допускающие выживание одной из фирм в зависимости от значения начального состояния системы. Эта ситуация соответствует случаю, когда первая фирма эффективнее работает со вторым видом товара, а вторая – с первым.

Более интересным будет противоположный случай *d*), характеризуемый неравенствами

****

Здесь любая из фирм выпускают оба вида товара, но предпочтение отдают своему. Вследствие этого они способны мирно сосуществовать, причем каждая фирма заполняет собственную экономическую нишу. Полученные результаты показывают, что каждая фирма непременно должна стремиться найти своего потребителя, иначе она будет вытеснена более сильным конкурентом. И лишь мощные фирмы, гигантские предприятия могут позволить себе роскошь не бояться конкурентной борьбы, уверенно вытесняя соперников из своей сферы производства.

Вырожденный случай *e*) соответствует равенствам

****

Эта ситуация означает, что фирмы фактически обладают одинаковыми свойствами за исключением, быть может, начальных состояний. В этих условиях ни одна из них не может вытеснить другую, вследствие чего обе фирмы сосуществуют. Подобная ситуация также наблюдалась в модели конкуренции.

**Задание 8.2. Экономическая ниша.** На основе численного решения системы (8.6) с соответствующими начальными условиями провести следующий анализ.

1. Найти все положения равновесия системы (8.6). Задавая эти значения в качестве начальных состояний системы, убедиться в том, что это действительно положения равновесия. Проверить экспериментально найденные значения на устойчивость, выбирая начальные состояния достаточно близкими к положениям равновесия.

2. Провести расчеты при выполнении условий ****************. Убедиться в том, что первая фирма разоряется.

3. Провести расчеты при выполнении условий ****************. Убедиться в том, что вторая фирма разоряется.

4. Провести расчеты при выполнении условий ****************. Меняя начальные состояния системы, обнаружить разорение как первой, так и второй фирмы.

5. Провести расчеты при выполнении условий ****************. Убедиться в том, что обе фирмы мирно сосуществуют вне зависимости от выбора начальных условий.

6. Провести расчеты при выполнении условий ****************. Проводя расчеты с различными начальными условиями, убедиться в том, что система выходит на различные положения равновесия.

***Эволюция двух фирм, выпускающих два различных товара
в условиях ограниченного спроса описывается уравнениями ниши.***

***Согласно модели ниши обе фирмы могут сосуществовать
в условиях преференции каждой фирмы конкретного товара.***

#### **4. Модель "свободный рынок"**

Обратимся теперь к экономической модели иной природы. Рассмотрим механизм изменения цен на товары и доходов населения на свободном рынке. Предполагается наличие большого числа независимых производителей товаров и продавцов, остро конкурирующих между собой. Для простоты будем считать, что объем выпускаемой продукции не меняется. Скорость изменения доходов населения считается прямо пропорциональна значению доходов *х*1 – чем больше средств имеется у людей, тем большие изменения оказываются возможными. Считается, что население имеет постоянный источник доходов, а полученные денежные средства расходуются исключительно на приобретение указанных товаров. Естественно, в отсутствии потребления товаров никакие средства не расходуются, а значит, доходы населения растут с постоянной скоростью *ε*1. Доходы снижаются за счет приобретения товаров пропорционально уровню цен *х*2 с некоторым коэффициентом пропорциональности *γ*1. Таким образом, скорость изменения доходов населения считается равной

*k*1 = (*ε*1 – *γ*1*х*2)*х*1.

Скорость изменения цен считается пропорциональной уровню цен, причем в отсутствии доходов населения товары не покупаются, и предприниматели вынуждены снижать цены с некоторой скоростью *ε*2. Рост цен осуществляется по мере возрастания доходов населения, а значит, и спроса на товары, с коэффициентом пропорциональности *γ*2. В результате получаем следующую формулу для определения скорости изменения цен

*k*2 = (*γ*2*х*1 –*ε*2)*х*2.

При сделанных предположениях изменение доходов населения и цен на товары будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений

  (8.7)

Она в точности совпадает с уравнениями, характеризующими модель "*хищник-жертва*". Как уже отмечалось в предшествующих лекциях, решение задачи будет меняться со временем периодически (см. Рис. 8.4).



Рис. 8.4. Изменение доходов и цен на свободном рынке
при значениях параметров *х*10 = 0.3, *х*20 = 0.8, *γ*1 *=*1, *γ*2 *=*1, *ε*1 *=*1, *ε*2 *=*1.

Дадим интерпретацию этих результатов. Предположим, что в начальный момент времени доходы населения и уровень цен сравнительно низкие, т.е. выполнены неравенства

*х*1<*ε*2/*γ*2, *х*2 <*ε*1/*γ*1.

Тогда производная от *х*1 положительна, а производная от *х*2 – отрицательна. При низких доходах населения мала его покупательная способность, а значит, не все произведенные товары раскупаются (вспомним, что объем выпускаемой продукции в данной модели остается неизменным). В условиях острой конкуренции на свободном рынке, находясь под постоянной угрозой разорения, предприниматель вынужден снижать цены на товары. Как следствие этого на первом этапе исследуемого процесса мы наблюдаем снижение уровня цен и рост доходов населения (см. Рис. 8.4). Рано или поздно наступает такой момент времени *t*1, когда доходы населения станут достаточно высокими, и будет выполнено равенство *х*1(*t*1)=*ε*2/*γ*2. При этом правая часть второго уравнения (8.7) окажется равной нулю, что соответствует экстремуму (в данном случае, минимуму) функции *х*2. Поскольку уровень цен еще достаточно низок, происходит дальнейший рост доходов населения. Таким образом, выполняются соотношения

*х*1>*ε*2/*γ*2, *х*2 <*ε*1/*γ*1.

На втором этапе исследуемого процесса доходы населения оказываются достаточно высокими, а уровень цен – низким. В этих условиях согласно уравнениям (8.7) обе производные положительны, т.е. мы наблюдает рост как доходов населения (поскольку цены еще сравнительно низкие), так и цен (покупательная способность населения уже достаточно высока). Наступает момент времени *t*2, когда возрастающая функция *х*2 достигнет отношения *ε*1/*γ*1. После этого оказываются справедливыми соотношения

*х*1>*ε*2/*γ*2, *х*2 >*ε*1/*γ*1,

и мы переходим на третий этап процесса, характеризуемый снижением доходов населения (цены достаточно высоки) и ростом цен (покупательная способность населения высока). По мере снижения доходов населения наступает момент *t*3, когда будет выполняться равенство *х*1(*t*3)=*ε*2/*γ*2 . После этого в условиях

*х*1<*ε*2/*γ*2, *х*2 >*ε*1/γ1.

наблюдается дальнейшее снижения доходов населения (цены еще достаточно высоки) и падения цен за счет снижения покупательной способности населения. Этот процесс продолжается вплоть до момента времени *t*4, когда цены упадут до величины *ε*1/*γ*1, после чего мы возвращаемся на первый этап, характеризуемый ростом доходов населения за счет снижения цен и дальнейшего уменьшения уровня цен в виду низкой покупательной способности населения. Начинается новый цикл рассматриваемого процесса.

Полученные результаты подтверждают, что экономические законы имеют столь же объективный характер, как и физические, химические и т.д. Предприниматель на свободном рынке не может не снижать цены при падении покупательной способности населения, поскольку в противном случае его опередят конкуренты и легко распродадут все свои товары. В условиях острой конкуренции необходимо как можно быстрее сбыть товары, пусть даже и по сниженным ценам, чем упрямо ждать окончательно свихнувшегося покупателя, который зачем-то приобретет товары по высокой цене, если рядом аналогичные вещи можно купить хоть немного дешевле. С другой стороны, при высоких доходах население быстро скупает все имеющиеся в продаже товары, а поддержать изменившийся баланс между спросом и предложением в условиях неизменности объема производства, заложенного в данную модель, можно исключительно за счет повышения цен. Да и как тут не поднять цены, если народ прямо-таки сметает товары с прилавка...

**Задание 8.3. Свободный рынок.** На основе численного решения системы (8.6) с соответствующими начальными условиями провести следующий анализ.

1. Задавая произвольным образом все параметры системы, убедиться в том, что цены на товары и доходы населения будут меняться периодически со временем.
2. Подобрать параметры системы таким образом, чтобы состояние системы со временем не менялось. Объяснить полученные результаты. Указать тип положения равновесия, опираясь на поведение системы в ее окрестности.
3. Установить зависимость периода колебания функций состояния системы от начального уровня доходов, а также от параметра *ε*1. Дать экономическую интерпретацию этих результатов.

Другой вариант соотношений между уровнем цен и доходов населения представлен в Приложении. Ниже мы рассмотрим иной способ регулирования баланса между спросом и предложением.

***В основе модели свободного рынка лежат уравнения Вольтерра – Лотки.***

***Согласно модели свободного рынка доходы населения и цены на товары
меняются периодически во времени.***

#### **5. Модель "монополизированный рынок"**

Предшествующая модель характерна для свободного рынка, когда имеется сравнительно много независимых друг от друга товаропроизводителей и между ними происходит острая конкурентная борьба. Только угроза конкуренции может заставить производителей товаров и торгующие организации пойти на столь отчаянный шаг, как снижение цен на товары и услуги в случае превышения предложения над спросом. Тот из предпринимателей, кто раньше почувствует изменение рыночной конъюнктуры и успеет вовремя снизить цены и быстро сбыть свой товар, сумеет получить значительную прибыль. Если же какой-то упрямец не захотел или не успел осуществить своевременное снижение цен, то он в принципе не сможет реализовать свою продукцию и неизбежно разорится на радость более расторопным конкурентам.

В условиях сильно монополизированного производства и сбыта продукции у предпринимателей имеется возможность в той же ситуации избежать нежелательного снижения цен без угрозы полного разорения. Монополист не боится конкуренции и может восстановить нарушенный баланс между спросом и предложением не за счет снижения цен и увеличения тем самым спроса на товар, а с помощью сокращения производства, т.е. уменьшения предложения. Предприниматель-монополист может снизить объем производства, считая для себя более выгодным продать меньше товара, но по более высокой цене. Он уверен, что у населения, испытывающего определенную потребность в данном товаре, просто не будет другого выхода, кроме как приобрести его по достаточно высокой фиксированной цене, хотя бы и в меньшем количестве.

В рамках данной модели цена на товар остается неизменной и уже не будет функцией состояния системы. В то же время наряду с доходами населения *х*1 будет меняться теперь уже объем выпускаемой продукции *х*3. В отсутствии потребления товаров предприниматель снижает не цены, а объем производства с некоторой скоростью *ε*3. Возрастание объема производства происходит по мере повышения доходов населения (с коэффициентом пропорциональности *γ*3), т.е. его покупательной способности. В отсутствии потребления товаров, т.е. при *х*3 = 0 доходы населения растут со скоростью *ε*1 поскольку у людей будут накапливаться неизрасходованные средства. При потреблении товаров возрастают расходы прямо пропорционально (с коэффициентом *γ*1) количеству имеющихся в продаже товаров, т.е. объему производства. На основании этих рассуждений приходим к следующей модели

  (8.8)

Мы вновь получаем модель типа "*хищник-жертва*" с хорошо известным периодическим решением. Вид этого решения характеризуется Рис. 8.4 с заменой индекса "2" на "3" и новой интерпретацией результатов[[13]](#endnote-13).

При низких начальных значениях доходов и объема выпускаемой продукции согласно уравнениям (8.8) наблюдается сокращение производства. Не имея достаточных средств, люди вынуждены снижать потребление товаров, вследствие чего уменьшаются их расходы. Поскольку люди, мало потребляя, накапливают деньги, увеличиваются их доходы. Со временем на рынке останется слишком малое количество товаров, не достаточное для поддержания даже сниженного спроса, а у людей постепенно накапливается некоторое количество денег, которое они могли бы истратить на приобретение товаров. В этих условиях предприниматель увеличивает выпуск товаров. Однако до тех пор, пока товаров имеется еще сравнительно малое количество, потребность населения остается не удовлетворенной, и люди продолжают накапливать средства. По мере выпуска все большего количества товаров спрос начинает удовлетворяться и, в конце концов, становится меньше предложения. Расходы населения на приобретение товаров возрастают, а покупательная способность естественно снижается. Наступает время, когда значительное количество товаров вновь остается не распроданным. Спасти предпринимателя от неминуемого разорения может снижение либо цен, либо производства, т.е. восстановление баланса между спросом и предложением. На монополистическом рынке предприниматель может, не боясь конкуренции, оставлять цены неизменными. Таким образом, сокращение производства неминуемо. Выпуск товаров будет возобновлен лишь тогда, когда население сумеет накопить достаточное количество средств для покупки товаров. Таким образом, предприниматель выпускает товар некоторыми не очень большими партиями, и этот процесс периодически повторяется.

**Задание 8.4. Монополизированный рынок.** На основе численного решения системы (8.8) с соответствующими начальными условиями провести следующий анализ.

1. Задавая произвольным образом все параметры системы, убедиться в том, что цены на товары и доходы населения будут меняться периодически со временем.
2. Подобрать параметры системы таким образом, чтобы состояние системы со временем не менялось. Оценить поведение системы в окрестности это положения равновесия. Дать экономическую интерпретацию этому результату.
3. Установить зависимость амплитуды колебания объема производства товаров от начального уровня доходов, а также от параметра *γ*2. Объяснить полученные результаты.

***В основе модели монополизированного рынка лежат уравнения Вольтерра – Лотки.***

***Согласно модели монополизированного рынка***

***доходы населения и объем выпускаемой продукции меняются периодически во времени.***

**Направление дальнейшей работы**. В последующей лекции мы убедимся в том, что рассмотренные выше математические модели описывают также и некоторые процессы социологии, политологии и психологии.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

Модель "*экономическая ниша*" аналогична описанной в предшествующей лекции биологической модели "*экологическая ниша*", в которой рассматриваются два вида, потребляющих, вообще говоря, одну и ту же пищу, но отдающих предпочтение своей. В этих условиях имеется возможность мирного сосуществования видов.

Мы рассмотрели процессы, происходящие на свободном и монополизированном рынке. В условиях жесткого государственного регулирования экономики нарушение баланса между спросом и предложением восстанавливается принципиально иными средствами. При ухудшении уровня жизни населения и падении его покупательной способности происходит не снижения цен или сокращение производства, а повышение должностных окладов. Это, в свою очередь, приводит к росту цен, что соответствует модели "*инфляция*".

Взаимовыгодное сотрудничество фирм описывается моделью типа "*симбиоз*". Если две дружественные фирмы, выпускающие составные части одной и той же продукции, изначально обладают малыми средствами, то они неизбежно разоряются. Достаточно большие стартовые капиталы фирм обеспечивают им полное процветание. При постепенном насыщении рынка товарами происходит либо разорению фирм, либо стабилизация рассматриваемой системы. Взаимодействие предпринимателя и рэкетира описывается уравнениями типа "*хищник - жертва*" с периодическим изменением доходов обоих действующих лиц.

В заключительной части приводится модель Солоу экономического роста, относящаяся к макроэкономике[[14]](#endnote-14).

#### **1. Модель "экологическая ниша"**

В предшествующей лекции рассматривалась модель "*экологическая ниша*", описываемая уравнениями



где *xi* –численность *i*-ого вида, *αij* – потребление *i*-ым видом *j*-ой пищи, *εi* – естественный прирост *i*-ого вида, *i*,*j* = 1,2. Определив *βij* = 1/*αij*, получаем рассмотренную выше модель "*экономическая ниша*".

Свойства рассматриваемой модели с точностью до смысла входящих в нее характеристик описывается Рис. 8.3. Повторяя предшествующие рассуждения, приходим к следующим вариантам развития событий. Первый случай, когда при любых начальных состояниях вымирает второй вид, соответствует неравенствам

****

При этом у первого вида отношения прироста численности к потреблению обоих типов пищи превосходит аналогичные отношения второго вида. Тем самым первый вид во всех отношениях оказывается более жизнестойким, и вымирание второго вида неизбежно. Аналогично противоположные неравенства неминуемо влекут вымирание первого вида. Фактически в этих двух вариантах наличие двух различных типов пищи не проявляется, и мы, по существу, возвращаемся к биологической модели конкуренции.

Соотношения

****

допускают выживание лишь одного вида. Начальное состояние системы определяет, какой конкретно вид вымирает. Более интересной является противоположная ситуация, характеризуемая неравенствами

****

Здесь оба вида в принципе способны потреблять любую пищу, но предпочтение оказывают своей. Вследствие этого они способны мирно сосуществовать. Тем самым каждый вид заполняет свою экологическую нишу, что хорошо согласуется с реальной ситуацией и соответствует названию рассматриваемой модели.

#### **2. Модель инфляции**

Еще один вариант рыночных отношений связан с жестким государственным регулированием экономики. Государство является товаропроизводителем и продавцом, а также работодателем населения, определяя его доходы. Пусть в силу каких-либо причин доходы населения оказываются слишком низкими, а цены – непомерно высокими, что приводит к нарушению баланса между спросом и предложением. Когда подобная ситуация наблюдается в условиях свободного рынка, восстановление баланса происходит за счет снижения цен, а следовательно, стимуляции повышенного спроса. В случае монополизированного рынка можно снизить объем производства, приблизив тем самым уровень предложения к снизившемуся уровню спроса. В данном случае реализуется третий сценарий развития событий.

Может ли государство снизить цены на товары? На такое действие вынужден идти предприниматель на свободном рынке, предпочитающий сбыть как можно больше продукции (хотя бы и по сниженной цене) и тем самым обогатиться за счет менее расторопных конкурентов. Государство не имеет конкурентов и в рассматриваемом случае по такому пути не пойдет. К тому же снижение цен неминуемо превратит пока еще действующие предприятия в убыточные. Государство не очень заинтересовано также и в сокращении объема производства. Это частник-монополист может пойти на временную консервацию своего предприятия, провести сокращение штатов, уменьшив тем самым статьи расходов, и направить вырученные средства в более прибыльные сферы деятельности. Государственному учреждению провести в жизнь столь непопулярные решения быстро и жестко значительно труднее. К тому же директор подобного предприятия получает твердый должностной оклад, а не прибыль с производства и реализации товаров, что не очень стимулирует оперативные действия с его стороны.

Однако в руках государства еще остаются мощные рычаги, заведомо отсутствующие у частного предпринимателя. Государство определяет и контролирует всю финансовую политику. С целью увеличения покупательной способности населения и снижения социальной напряженности оно может пойти на повышение окладов государственных служащих, а также пенсий, пособий, стипендий и т.д. Откуда же у государства найдутся немалые средства для увеличения доходов населения? Может ли оно силой каких-либо эффективных действий повысить благосостояние своих многострадальных граждан? Видимо, нет. Но ведь речь-то идет всего лишь об увеличении числа денежных знаков, находящихся в обращении. Выполнение этого мероприятия вполне по силам даже и не очень развитому государству, находящемуся в условиях жесточайшего экономического кризиса.

В данной модели изменение цены на товар *х*2 по-прежнему характеризуются доходами населения (точнее, имеющимся у него объемом денежной массы), а доходы населения *х*1 определяются постоянно индексируемой заработной платой, начисляемой государством исходя из имеющегося уровня цен. Естественно, чем выше цены на товары, тем чаще вынуждено государство повышать заработную плату своим служащим. Таким образом, изменение доходов населения будет пропорционально цене на товар. В результате мы приходим к системе уравнений

  (8.9)

где положительные константы *α* и *β* являются параметрами процесса.

Дифференцируя первое равенство (8.9) и используя второе равенство, получаем уравнение



Аналогично, дифференцируя второе равенство (8.9) и используя первое равенство, будем иметь



Решения этих уравнений имеют вид[[15]](#endnote-15)

*x*1(*t*) = *a*1exp(-*λt*) + *b*1exp(*λt*), *х*2(*t*) = *a*2exp(-*λt*) + *b*2exp(*λt*),

где  а константы *a*1, *b*1, *a*2, *b*2 находятся из начальных условий. Согласно полученным результатам мы наблюдаем экспоненциальный рост цен и доходов населения.

Дадим интерпретацию этих результатов. Столкнувшись с низким спросом на товары, государство повышает оплату труда своим служащим, благо станок, печатающий денежные знаки, находится в надежных руках. По мере возрастания имеющейся у населения денежной массы увеличивается его покупательная способность, что приводит к повышению спроса на товары. При неизменном объеме производства и возрастающем спросе товар неминуемо окажется в дефиците. Ликвидировать его, в принципе, можно было бы за счет увеличения объема производства, что не столь уж процветающему государству оказывается явно не под силу. Можно было бы, в принципе, снизить уровень заработной платы. Но это уже грозит серьезными социальными потрясениями. Таким образом, единственный надежный путь выхода из сложившейся ситуации связан с повышением цен, что неминуемо ведет к снижению спроса при неизменном предложении. Однако рост цен непременно приводит к обнищанию народных масс и снижению уровня потребления. Для восстановления баланса между спросом и предложением во избежание социально-политического кризиса государство вновь повышает заработную плату, что непременно вызовет очередной виток цен и т.д. Наблюдаемый процесс называется ***инфляцией***[[16]](#endnote-16).

#### **3. Модели экономического сотрудничества**

Сосуществование фирм не обязательно идет по пути конкурентной борьбы. Возможна и противоположная ситуация, когда фирмы вступают на путь взаимовыгодного сотрудничества. Предположим, что две фирмы выпускают комплектующие изделия так, что продукция одной из фирм не может быть реализована без соответствующей продукции другой фирмы (грубо говоря, одна фирма производит болты, а вторая – гайки к этим болтам). В этих условиях фирмы просто не могут существовать друг без друга. В то же время успех одной из них благоприятно сказывается на финансовом положении другой фирмы. В результате приходим к уравнениям



где *хi* –капитал *i*-ой фирмы, *εi* – ее скорость разорения в отсутствии другой фирмы, *γi* – показатель влияния *j*-ой фирмы на *i*-ую, *i*=1,2, *j≠ i*.

Полученные соотношения с точностью до обозначений совпадают с биологической моделью "*симбиоз*" (см. предшествующая лекция). Зная свойства последней, можно заключить, что при малых начальных капиталах обе фирмы разоряются. Достаточно большие стартовые капиталы фирм приводят к полному процветанию, которое выражается в неограниченном возрастании их капиталов. Если же одна из фирм-компаньонов является бедной, а другая – богатой, то в течение некоторого времени богатая фирма постепенно беднеет, поддерживая своего более слабого компаньона. В то же время бедная фирма богатеет, имея в качестве компаньона достаточно сильную фирму. А дальше возможно два варианта развития событий. Возможно, бедная фирма окрепнет раньше, чем богатая фирма существенно ослабнет, и тогда обе фирмы будут неограниченно богатеть. Однако возможна и противоположная ситуация, когда более сильная фирма ослабнет раньше, чем окрепнет более слабая фирма. В этом случае обе фирмы в конце концов разорятся. Сравнительный анализ экономической и биологической модели типа "*симбиоз*" приводится в Tаблице 8.5.

**Задание 8.5. Экономическое сотрудничество.** На основе численного решения системы провести следующий анализ.

1. Провести расчеты для малых начальных состояний системы. Убедиться в том, что обе фирмы разоряются.

2. Провести расчеты для больших начальных состояний системы. Убедиться в том, что капиталы обоих фирм неограниченно возрастают.

3. Меняя начальные состояния системы, обнаружить режимы немонотонного характера убывания и возрастания капиталов фирм.

4. Найти нетривиальное положение равновесия системы. Экспериментально убедиться, что оно не устойчиво.

Таблица 8.5. Аналогия между моделями типа "*симбиоз*".

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***наука*** | **биология** | **экономика** |
| *явление* | симбиоз | сотрудничество |
| *х*i | численность видов | доходы фирм |
| *ε*i | скорость вымирания видав отсутствии другого вида | скорость разорения фирмы в отсутствии другой фирмы |
| *γ*i | прирост численности вида при наличиидружественного вида | прирост капиталафирмы при наличии дружественной фирмы |
| *β*i | снижение приростачисленности вида из-за ограниченности пищи | снижение прироста доходов фирмы из-за насыщения рынка |

Вариант неограниченного расширения производства в модели экономического сотрудничества, конечно же, на практике не реализуется. Для уточнения модели можно учесть ограниченность потребления выпускаемой продукции, т.е. постепенно насыщение рынка по мере расширения производства. Предположим, что снижение роста капитала фирмы за счет насыщения рынка зависит квадратичным образом от значения ее капитала. В результате получаются уравнения

 

где коэффициенты *β*1 и *β*2 характеризуют насыщение рынка товарами соответствующих фирм. Эти соотношения в точности совпадают с уравнениями модели "*симбиоз с ограниченной пищей*" (см. Лекция № 6). В зависимости от сочетания параметров здесь возможно стабилизация или разорение обеих фирм.

**Задание 8.6. Экономическое сотрудничество в условиях ограниченного спроса**. На основе численного решения данной системы провести следующий анализ.

1. Провести расчеты для малых начальных состояний системы. Убедиться в том, что обе фирмы разоряются.

2. Провести расчеты для больших начальных состояний системы. Подобрать параметры системы таким образом, чтобы капиталы обоих фирм со временем неограниченно возрастали.

2. Провести расчеты для больших начальных состояний системы. Подобрать параметры системы таким образом, чтобы капиталы обоих фирм со временем стабилизировались.

#### **4. Модель "Рэкетир - предприниматель"**

Рассматривается еще один специфический тип экономического "сотрудничества" – взаимоотношение между предпринимателем и рэкетиром. Функциями состояния здесь являются их доходы соответственно *х*1 и *х*2. Предполагается, что предприниматель имеет свою фирму с постоянным источником доходов, и в отсутствии рэкетира его доходы растут со скоростью *ε*1. Рэкетир живет исключительно за счет предпринимателя, и в отсутствии последнего расходует имеющиеся у него средства со скоростью *ε*2. Повышение доходов предпринимателя приводит к пропорциональному обогащению рэкетира, которое, в свою очередь, осуществляется за счет изъятия средств у предпринимателя. Исследуемый процесс описывается системой уравнений



где параметры *γ*1 и *γ*2 характеризуют влияния действующих лиц друг на друга.

Эти соотношения в точности соответствуют биологической модели "*хищник-жертва*". Аналогия между биологическим и экономическим объектами представлена в Таблице 8.6. Естественно, решение задачи оказываются периодическими функциями.

Таблица 8.6. Аналогия между моделями типа "*хищник-жертва*".

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **характеристика** | **биологическая модель** | **экономическая модель** |
| *х*1 | численность жертв | доход предпринимателя |
| *х*2 | численность хищников | доход рэкетира |
| *ε*1 | прирост жертвв отсутствии хищников | естественная прибыль предпринимателя |
| *ε*2 | вымирание хищниковв отсутствии пищи | естественные расходы рэкетира |
| *γ*1 | истребление жертв хищниками | падение доходов предпринимателя за счет действия рэкетира |
| *γ*2 | рост численности хищников при наличии пищи | рост доходов рэкетира за счет ограбления предпринимателя |

Дадим интерпретацию полученных результатов. С возрастанием доходов предпринимателя рэкетир имеет возможность собирать всё большую дань. Однако по мере роста "аппетитов" рэкетира предприниматель начинает разоряться, что со временем сказывается и на доходах рэкетира. Поскольку полное разорение предпринимателя губительно для рэкетира, он вынужден сокращать изымаемую денежную сумму. В результате со временем предприниматель восстанавливает финансовое положение своей фирмы, пошатнувшееся из-за непомерных поборов. И тогда рэкетир получает возможность наверстать упущенное. Начинается новый цикл процесса.

Итак, мы уже сталкивались с уравнениями Вольтерра–Лотки при описании процессов химии (система реакций Лотки A+X→2X, X+Y→2Y, Y→B), биологии (система хищник – жертва), сельского хозяйства (система урожайность плодородие – урожайность) и экономики (модели свободного и монополизированного рынка, а также предприниматель – рэкетир). Их сравнительная характеристика представлена в Таблице 8.7[[17]](#endnote-17).

Таблица 8.8. Характеристика моделей типа "*хищник-жертва*".

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***приложение*** | **модель** | **«хищник»** | **«жертва»** |
| *химия* | система Лотки | концентрация X | концентрация Y |
| *биология* | хищник–жертва  | хищники | жертвы |
| *сельское хозяйство* | плодородие–урожайность | плодородие | урожайность |
| *экономика* | свободный рынок | цены | доходы |
| *экономика* | монополизированный рынок | объем товаров | доходы |
| *экономика* | рэкетир–предприниматель | рэкетир | предприниматель |

#### **5. Модель Солоу экономического роста**

Дана некоторая экономическая система, в которой вся экономика рассматривается как единое целое и является закрытой от влияния извне. Все фирмы существуют в условиях конкуренции и стремятся максимизировать свою прибыль. Система производит единственный продукт, который используется для потребления и инвестиций. Условия протекания процесса со временем не меняются. Государственные расходы и налоги не учитываются.

В рамках имеющейся системы рассматриваются следующие макроэкономические показатели: *Y* – ***валовой внутренний продукт*** (ВВП), *I* – валовые ***инвестиции***, *C* – ***фонд потребления***, *K* – основные ***производственные фонды***, *L* – ***число занятых*** в производственной сфере.

ВВП определяется производственным фондом и занятостью, т.е. *Y = F*(*K*,*L*), где *F* называется ***производственной функцией***. В качестве таковой может быть выбрана ***функция Кобба – Дугласа*** *F*(*K*,*L*)=*AKαLβ*, где *A*, *α* и *β* – некоторые положительные константы. Далее, ВВП складывается из инвестиций и потребления, т.е. *Y = I + C*.

Изменение производственных фондов определяется их постоянным убыванием (амортизацией) и инвестициями



где *μ* – коэффициент износа. Наконец, число занятых растет с постоянной скоростью, т.е.



где *ν* – некоторый положительный коэффициент. Кроме того, известны начальные значения производственных фондов и занятости

*K*(0) = *K*0, *L*(0) = *L*0.

Приведенные выше соотношения характеризуют ***модель Солоу*** экономического роста. Она лежит в основе анализа темпов изменения капитала и экономического эффекта экономического прогресса и является отправной точкой для многих макроэкономических теорий[[18]](#endnote-18).

### **КОММЕНТАРИИ**

1. Различные математические вопросы и модели экономических систем описываются, например, в книгах Acemoglu, Andrews, Ashmanov, Aubin, Burghes, Burmeister, Coldwell, Crass, Dixit, Dunbar, Dym, Ekeland, Etheridge, Gandolfo, Gidrovich, Intriligator, Ivanilov, Kemeny, Kolemaev, Lancaster, Moiseev, Stachurski, Neumann, Zamkov. [↑](#endnote-ref-1)
2. В Лекции № 11 будут рассмотрены некоторые модели экономических процессов, описываемые системами с распределенными параметрами, см. также Etheridge. Дискретные экономические модели рассматриваются, например, в Kolemaev. Использование теории игр для описания экономических систем приводятся в Лекции
№ 16, см. также Aubin, Ekeland, Gidrovich, Neumann. Стохастические модели экономики см. Dunbar, Etheridge, Kemeny, Stachurski. Методы оптимизации в задачах экономики описываются, например, в Dixit, Intriligator, Kolemaev. [↑](#endnote-ref-2)
3. Таблица 8.1 представляет собой рассмотренную в предшествующей лекции Таблицы 7.1, дополненной экономической интерпретацией уравнения Ферхюльста. [↑](#endnote-ref-3)
4. Наличие трех и более фирм, производящих один и тот же товар, также ведет к постепенному поглощению наиболее сильной фирмы своих незадачливых конкурентов (см. Приложение к предыдущей лекции). Тем самым неминуемо происходит монополизация рынка. [↑](#endnote-ref-4)
5. Можно сразу определить положения равновесия рассматриваемой системы. Приравнивая нулю правые части уравнений (8.6), получаем



Очевидно, данная система алгебраических уравнений имеет четыре решения:



Первое из них соответствует разорению обеих фирм и всегда является неустойчивым (см. все варианты Рис. 8.3). Второе решение является устойчивом положением равновесия (узлом) при *C*<*B* (см. Рис. 8.3 *a* и *c*) и неустойчивом положением равновесия *B*<*C* (см. Рис. 8.3 *b* и *d*). Третье положение равновесия устойчиво (также узел) при *B*<1 (см. Рис. 8.3 *b* и *c*) и неустойчиво при *B*>1 (см. Рис. 8.3 *a* и *d*). Наконец, четвертое положение равновесия существует либо при *B*<1 и *C*<*B* (и тогда оно не устойчиво,в частности, седло, см. Рис. 8.3 *a* и *c*), либо при *B*>1 и *B*<*C* (и тогда оно устойчиво, в частности, узел, см. Рис. 8.3 *d*). Это объясняется тем, что функции *u* и *v* должны быть положительны. [↑](#endnote-ref-5)
6. Исход *a* является аналогом варианта *a* в модели конкуренции. [↑](#endnote-ref-6)
7. Рис. 8.3 *a* соответствует случаю, когда оба неравенства, реализующие исход *a*, являются строгими. Если одно из этих соотношений реализуется в форме равенства, то средняя область на рисунке представляет собой треугольник, а не четырехугольник. Однако это никак не сказывается на исходе. [↑](#endnote-ref-7)
8. Исход *b* является аналогом варианта *b* в модели конкуренции. [↑](#endnote-ref-8)
9. Рис. 8.3 *b* соответствует случаю, когда оба неравенства, реализующие исход *b*, являются строгими. Если одно из этих соотношений реализуется в форме равенства, то средняя область на рисунке представляет собой треугольник, а не четырехугольник. [↑](#endnote-ref-9)
10. Исход *c* не имеет аналога в модели конкуренции. [↑](#endnote-ref-10)
11. Исход *d* не имеет аналога в модели конкуренции. [↑](#endnote-ref-11)
12. Исход *e* вариант является аналогом варианта *c* в модели конкуренции. [↑](#endnote-ref-12)
13. В моделях как свободного, так и монополизированного рынка в качестве «жертв» выступают доходы населения. Однако, если в модели свободного рынка «хищниками» оказываются цены на товары, то в модели монополизированного рынка это уже объем выпускаемых товаров. [↑](#endnote-ref-13)
14. ***Макроэкономика*** – это часть экономической теории, изучающей экономику как единое целое, см., например, Samuelson. [↑](#endnote-ref-14)
15. Действительно, соответствующие характеристические уравнения имеют вид  Его корни  действительны, чем и определяется форма приведенных обобщенных решений. [↑](#endnote-ref-15)
16. Математические модели инфляции рассматриваются, например, в Kolemaev. [↑](#endnote-ref-16)
17. В последующей лекции мы столкнемся с еще одной интерпретацией модели «хищник – жертва». [↑](#endnote-ref-17)
18. В приведенной модели Солоу присутствует недоопределенность, связанная с распределением ВВП между инвестициями и потреблением. Это обстоятельство позволяет на базе этой модели ставить задачи оптимального управления, см. Лекция № 21. О модели Солоу см. Acemoglu, Burmeister, Kolemaev [↑](#endnote-ref-18)